

4 次の の中に適当な数または式を入れよ．また (イ) ~ (ホ) の「 」で囲まれた文章の理由を，最後の (イ) ~ (ホ) の解答のところで述べよ．

$$\text{方程式 } x^2 - 3y^2 = 1 \quad (1)$$

をみたす整数の組 (x, y) を求めることを考える．(以下この方程式の整数解を単に解と略称する．)

準備のために次のことを確かめておく．

(イ) 「 a, b, c, d が整数であって， $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ ならば， $a = c, b = d$ である」

次に (x, y) が解であれば， $(x, -y), (-x, y), (-x, -y)$ も解であることは，方程式 (1) により明らかであるから， (x, y) が共に負でない解を求めることが基本的である．それでそのような解を求める手段として

$$(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3}, \quad (2)$$

(x_n, y_n は負でない整数， $n = 0, 1, 2, \dots$) とおく．そうすると (イ) によって，

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 1 \quad (3)$$

$x_2 = \quad, y_2 = \quad, x_3 = \quad, y_3 = \quad$ である．

一方， $(2 + \sqrt{3})^2$ と $(2 - \sqrt{3})^2$ ， $(2 + \sqrt{3})^3$ と $(2 - \sqrt{3})^3$ などを比較することによって，一般に

$$(2 - \sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

であることがわかる．

(2) と (4) と， $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ を使って，

$$1 = (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = x_n^2 - 3y_n^2$$

となるから，(2) で定まる (x_n, y_n) は方程式 (1) の解であることがわかる．とく

に， x, y の一方が 0 となるような負でない解は，明かに $x = 1, y = 0$ で，それは

(3) の (x_0, y_0) に外ならない．

次に (x_{n-1}, y_{n-1}) と (x_n, y_n) との関係を求めてみる ($n \geq 1$) .

$$x_n + y_n \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n = (x_{n-1} + y_{n-1} \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) =$$

ゆえに , $x_n =$, $y_n =$

したがって (x_0, y_0) から出発して , 負でない解 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\dots\dots$,

(x_n, y_n) , $\dots\dots$ を順次求めて行くことができる . しかも $y_1 < y_2 < y_3 < \dots\dots$

である .

以上のことで負でない解を多数みつけたのであるが , これらで負でない解が尽くされているかどうかを次に吟味する .

いま任意の正の解 (x, y) , $(x > 0, y > 0)$ をとると ,

$$(x + \sqrt{3}y)(2 - \sqrt{3}) = (2x - 3y) + (2y - x)\sqrt{3}$$

(ロ) 「 $x' = 2x - 3y$, $y' = 2y - x$ とおくとき , (x', y') も解である」

(ハ) 「そして $x > x' > 0$, $y > y' \geq 0$ である」

(二) 「それで , 任意の正の解 (x, y) から出発して , (ロ) における (x', y') を求める操作を順次行なうことによって , (3) に示す負でない解 (x_0, y_0) に達する」

(ホ) 「したがって , 任意の負でない解 (x, y) は式 (2) によって定まる (x_n, y_n)

$(n = 0, 1, 2, \dots\dots)$ のどれか 1 つである .」