

3 原点  $O$  を中心とする単位円周上に、次の (i), (ii) を満たす点列  $P_0, P_1, P_2, \dots$  がある。ただし、 $P_0$  の座標は  $(1, 0)$  とする。

(i)  $\angle P_0OP_n$  は  $n$  とともに単調に増大し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \angle P_0OP_n = 2\pi$  である。

(ii) 数列  $\{\angle P_{n-1}OP_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) は初項  $\theta$  ( $\theta > 0$ )、公比  $r$  ( $r > 0$ ) の等比数列である。

(1)  $\theta$  と  $r$  との関係式を求めよ。

(2)  $\alpha$  は  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$  を満たす定数とする。おうぎ形  $P_{n-1}OP_n$  の面積を  $S_n$  とするとき、

$$\alpha = S_1 + S_5 + S_9 + \dots + S_{4n-3} + \dots$$

を満たす  $r$  はただ 1 つ存在することを示せ。