

3 関数 $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$, $(x > 0)$ について次の操作を行う. $x_1 > \sqrt{2}$ とする. 直線 $x = x_1$ が曲線 $y = f(x)$ と交わる点を P_1 とする. P_1 から x 軸に平行に引いた直線が直線 $y = x$ と交わる点を Q_1 とし, Q_1 から x 軸への垂線と曲線 $y = f(x)$ の交点を P_2 とする. 点 P_2 の x 座標を x_2 とする. x_1 から x_2 を定めたように x_2 から x_3 を定め, 以下同じように x_4, x_5, \dots を定める.

- (1) x_n と x_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) の関係を漸化式の形で与えよ.
- (2) $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2})$ であることを示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ を証明せよ.
- (3) 範囲 $x > \sqrt{2}$ で定義された関数 $g(x)$ のグラフ上の点 $(t, g(t))$, $(t > \sqrt{2})$ における接線が x 軸と 1 点で交わるとし, その交点の x 座標を $h(t)$ とする. t と $h(t)$ の関係が (1) で求めた x_n と x_{n+1} の関係に等しいとき, 関数 $g(x)$ の形を求めよ.