

1 $x > 0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \log \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - x^2 \log x$$

で定める．対数は自然対数である．

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．

(2) $f(x) \geq 0$ であることを示し， $f(x) = 0$ となる x を求めよ．

(3) 正の実数 p, q について不等式

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．