

1 座標平面上に、原点 O 、点 $A_0(l_0, 0)$ 、 O からの距離が l_0 である点 B_0 (この点の y 座標は正の値とする) の 3 点からなる二等辺三角形 OA_0B_0 を考える。ここで、 $\angle A_0OB_0 = 2\theta$ とする。この二等辺三角形 OA_0B_0 に内接する円の中心を I_0 とし、半径を r_0 とする。この円に外接する台形 $A_0B_0A_1B_1'$ を考え (点 A_1 は辺 OB_0 上、点 B_1' は辺 OA_0 上にあるものとする)、辺 OB_0 に関して点 B_1' を対称移動した点を B_1 とおく。つぎに $\triangle OA_1B_1$ の内接円を描き、その中心を I_1 、半径を r_1 とする。同様の作業を n 回繰り返してできる $\triangle OA_nB_n$ およびその内接円 (中心を I_n 、半径を r_n とする) を考える (下図参照)。ここで、辺 OA_n の長さを l_n とする。つぎの各問に答えよ。

- (1) r_0 を l_0 および θ を用いて表せ。
- (2) l_n を l_0, θ および n を用いて表せ。
- (3) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を l_0, θ および n を用いて表せ。
- (4) $\triangle OA_nB_n$ の内接円の面積 S_n を l_0, θ および n を用いて表せ。
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i$ を l_0 および θ を用いて表せ。