

1  $A, B$  2 つの町がある．毎年 1 月 1 日に， $A$  町の前年の住民のうち 4 割が  $B$  町に， $B$  町の前年の住民のうち 2 割が  $A$  町に，それぞれ引っ越す（住民の数は十分に多く，引っ越す住民の割合は正確に 4 割，2 割と見なしてよい）．それ以外には住民の移動はなく， $A$  町， $B$  町両方をあわせた住民の数は不変である．次の各問に答えよ．

- (1) ある年の末に  $A$  町と  $B$  町それぞれに住んでいる住民の数を  $a_0, b_0$  とする．1 年後に  $A$  町と  $B$  町それぞれに住んでいる住民の数  $a_1, b_1$  を表す式を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

とおくとき， $2 \times 2$  の行列  $M$  を具体的に示せ．

- (2) 以下の式を満足する実数  $\alpha, \beta$  の値を求めよ．ただし  $E$  は  $2 \times 2$  の単位行列である．

$$M(M - \alpha E) = \beta(M - \alpha E)$$

- (3) (2) で与えられた式は， $\alpha$  と  $\beta$  を入れ換えても成り立つ．このことと (2) の結果を用いて  $M^n$  を求めよ．ただし  $n$  は正の整数とする．

- (4)  $n$  年後に  $A$  町と  $B$  町それぞれに住んでいる住民の数を  $a_n$  と  $b_n$  とで表す．このとき，つぎの極限を求めよ．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$