

2 座標平面上の変換 $f: P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

で定める．ここで， $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする．初期点 P_0 を原点 O にとり，漸化式

$P_{n+1} = f(P_n)$ ($n \geq 0$) により，点列

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$$

をつくる．次の問に答えよ．

(1) 変換 f について， $f(U) = U$ となる点 $U(a, b)$ を求めよ．この点を変換 f の不動点という．

(2) この不動点 U について，

$$|\overrightarrow{UP_{n+1}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{UP_n}|, \quad \angle P_nUP_{n+1} = \alpha \quad (n \geq 0)$$

を示せ．

(3) α を変化させたとき，不動点 U は円の周上を動くことを示せ．また，その円の中心と半径を求めよ．

(4) 三角形 P_nUP_{n+1} ($n \geq 0$) の面積を S_n ，その総和を $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ とする． α を変化させたときの S の最大値を求めよ．