

2  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n = 2, 3, 4, \dots)$  で定まる数列  $\{a_n\}$  に関して、つぎの各問に答えよ。

(1)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}}$  の値を求めよ。

(2)  $n = 1, 2, 3$  のそれぞれについて、

$$a_{2n+2} = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n$$

が成り立つことを確かめよ。さらに、 $a_{2n+1}$  を  $a_{n+1}, a_n$  で表す式を推測せよ。

(3) 自然数  $n$  に関する 1 組の式

$$\begin{cases} \text{(2) で推測した式} \\ a_{2n+2} = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n \end{cases}$$

がすべての自然数  $n$  に対して成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。