

2 つぎの各問に答えよ．ただし， i は虚数単位である．

- (1) 複素数 z と共役な複素数を \bar{z} とするとき，任意の整数 n に対して，つぎの (a)，
(b) が成り立つことを示せ．ただし， $z \neq 0$ とする．

(a) $z^n + (\bar{z})^n$ は実数である．

(b) $z^n - (\bar{z})^n$ は 0 または純虚数である．

- (2) θ_1, θ_2, p, q を実数とし，

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi, \quad \alpha = p + qi, \quad \beta = -p + qi$$

とするとき，つぎの各問に答えよ．ただし， $\alpha \neq 0$ とする．

(a)

$$A_n = \alpha^n \cos n\theta_1 + \beta^n \cos n\theta_2, \quad B_n = \alpha^n \sin n\theta_1 + \beta^n \sin n\theta_2$$

とするとき，任意の整数 n に対して，つぎの (i)，(ii) が成り立つことを示せ．

(i) A_n は実数である．

(ii) B_n は 0 または純虚数である．

- (b) $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$ ， $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ とし， $C_n = (\alpha z_1)^n + (\beta z_2)^n$ と
するとき，任意の整数 n に対して C_n は実数であることを示せ．