

2 中心  $O$  , 半径 1 の円周上に , 反時計まわりの順に 4 点  $A, B, C, D$  が並んでいる .  
 $D$  を含む弧  $\widehat{CA}$  の中点を  $D_1$  ,  $C$  を含む弧  $\widehat{BD_1}$  の中点を  $C_1$  とする .

(1) 四角形  $ABC_1D_1$  の面積は四角形  $ABCD$  の面積より小さくないことを証明せよ .

(2) さらに ,  $D_1$  を含む弧  $\widehat{C_1A}$  の中点を  $D_2$  ,  $C_1$  を含む弧  $\widehat{BD_2}$  の中点を  $C_2$  とする .

以下同様にくり返して , 円周上の点列  $\{C_n\}$  ,  $\{D_n\}$  をつくる .

$\alpha_n = \angle D_nOA$  ,  $\beta_n = \angle BOC_n$  とおくとき ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  を

$\theta = \angle AOB$  を用いて表せ . ただし , 円周上の 2 点  $P, Q$  に対して ,  $\angle POQ$  は  $P$  から  $Q$  まで反時計まわりにはかるものとする .