

1 実数  $x$  に対して,  $x$  を越えない最大の整数を  $[x]$  で表す.  $a_m = [\sqrt{m}]$

( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) に対して, 数列  $b_1, b_2, b_3, \dots$  を  $b_1 = 0, k \geq 2$  のとき

$a_m < k \leq a_{m+1}$  となる  $m$  に対して  $b_k = m$  と定める.

次の問いに答えよ.

(1) 数列  $\{b_k\}$  の一般項を求めよ.

(2) すべての自然数  $n$  に対して  $\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3$  が成り立つことを示せ.

(3)  $\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}]$  を求めよ.