

2 自然数 n に対して、関数 $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ とその定積分 $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ を考える。ただし、 e は自然対数の底である。

次の問に答えよ。

- (1) 区間 $0 \leq x \leq 1$ 上で $0 \leq f_n(x) \leq 1$ であることを示し、さらに、 $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) a_1 を求めよ。 $n > 1$ に対して、 a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して、等式

$$\frac{a_n}{n!} = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

が成り立つことを証明せよ。

- (4) いかなる自然数 n に対しても、 $n!e$ は整数とならないことを示せ。