

1 座標平面上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。

点 P は、原点から出発し、直線 $y = x$ に沿って x 座標が増加する向きに動き始める。
点 P が格子点に達すると、動く方向を変えることも変えないこともあるが、常にその格子点を通る傾き 1 または -1 の直線に沿って x 座標が増加する向きに進む。ただし、 P の y 座標は常に $0 \leq y \leq 3$ の範囲にあるとする。

n を自然数とする。上の条件にしたがって P が原点から点 $(2n, 0)$ に到達するとき P がたどりうる経路の総数を a_n とおく。同様に、点 $(2n, 2)$ に到達するとき P がたどりうる経路の総数を b_n とおく。次の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} および b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (2) $a_n + tb_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が等比数列となるような数 t をすべて求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ の値を求めよ。