

5 (C) n を 2 以上の自然数とする．数列 $\{S_n\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている．

(1) 不等式 $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$ が成り立つことを示せ．

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して, $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ ($k = 1, 2, \dots$) とおく．数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ．また, $\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ．

(3) 不等式 $\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．