

4 (c) 平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき、その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし、この点から右斜め 45° または右斜め -45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点を取り、この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点を取り、第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し、こうしてできる線分をつないだものを折れ線グラフということにする。上図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。必要ならば右図を参考にせよ。

- (1) n は正の整数、 k は $0 \leq k \leq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n + k$ が偶数であることを示せ。また、この必要十分条件がみたされているとき、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。
- (2) n は 2 以上の整数、 k は $0 \leq k \leq n - 2$ なる整数で、 $n + k$ は偶数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n - 2, k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は、原点 O と格子点 $(n - 1, k + 1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。
- (3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において、表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i, T_i), i = 0, 1, 2, \dots, 9$, を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし、 $T_0 = 0$ とする。 $T_9 = 3$ が起きたとき、どの $T_i (i = 0, 1, 2, \dots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。