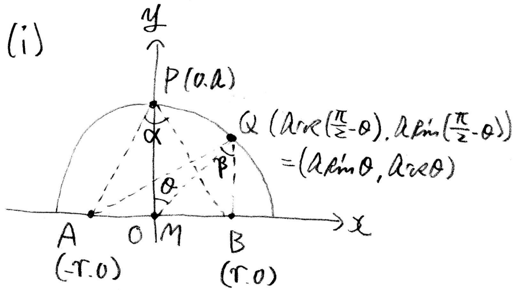
京大理系　1961前期　③

(i)



xy座標で考える

左図のように A, B, P, Q, M をとる

対称性より Q は $x>0$ の部分にあるとする

余弦定理より $AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cos\alpha$

$4r^2=a^2+r^2+a^2+r^2-2(a^2+r^2)\cos\alpha$,　$(a^2+r^2)\cos\alpha=a^2-r^2$

$\cos\alpha=\dfrac{a^2-r^2}{a^2+r^2}$.　よって $a>r$ のとき $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,　$a<r$ のとき $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha\neq 0$,　$a\neq r$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,　$\tan^2\alpha+1=\dfrac{(a^2+r^2)^2}{(a^2-r^2)^2}$,　$\tan^2\alpha=\dfrac{\cancel{a^4}+2a^2r^2+\cancel{r^4}-\cancel{a^4}+2a^2r^2-\cancel{r^4}}{(a^2-r^2)^2}$,

$a>r$ のとき $\tan\alpha>0$ より $\tan\alpha=\dfrac{2ar}{a^2-r^2}$,　$a<r$ のとき $\tan\alpha<0$ より $\tan\alpha=\dfrac{2ar}{a^2-r^2}$　よって $\tan\alpha=\dfrac{2ar}{a^2-r^2}$

(ii) 余弦定理より $AB^2=AQ^2+BQ^2-2AQ\cdot BQ\cos\beta$

$4r^2=(a\sin\theta+r)^2+a^2\cos^2\theta+(a\sin\theta-r)^2+a^2\cos^2\theta-2\sqrt{(a\sin\theta+r)^2+a^2\cos^2\theta}\sqrt{(a\sin\theta-r)^2+a^2\cos^2\theta}\cos\beta$

$4r^2=a^2+\cancel{2ar\sin\theta}+r^2+a^2-\cancel{2ar\sin\theta}+r^2-2\sqrt{a^2+2ar\sin\theta+r^2}\sqrt{a^2-2ar\sin\theta+r^2}\cos\beta$

$2r^2=a^2+r^2-\sqrt{(a^2+r^2)^2-4a^2r^2\sin^2\theta}\cos\beta$,　$2r^2=a^2+r^2-\sqrt{a^4+2a^2r^2+r^4-4a^2r^2+4a^2r^2\cos^2\theta}\cos\beta$

$\cos\beta=\dfrac{a^2-r^2}{\sqrt{(a^2-r^2)^2+4a^2r^2\cos^2\theta}}$　よって $a>r$ のとき $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,　$a<r$ のとき $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$　$a\neq r$ より $\beta\neq\frac{\pi}{2}$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$.　$\tan^2\beta+1=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$　$\tan^2\beta+\cancel{1}=\dfrac{\cancel{(a^2-r^2)^2}+4a^2r^2\cos^2\theta}{(a^2-r^2)^2}$

$a>r$ のとき $\tan\beta>0$ より $\tan\beta=\dfrac{2ar\cos\theta}{a^2-r^2}$,　$a<r$ のとき $\tan\beta<0$ より $\tan\beta=\dfrac{2ar\cos\theta}{a^2-r^2}$　よって $\tan\beta=\dfrac{2ar\cos\theta}{a^2-r^2}$

ゆえに $\tan\alpha\cdot\cos\theta=\tan\beta$