京大理系　1961前期　⑤

(i) $1\leqq n\leqq 100$ のとき

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 50 \\ \hline 5050 \end{array}$$

$$S=\sum_{m=1}^{n}(n-m)+\sum_{m=n}^{100}(-n+m)=n^2-\frac{1}{2}n(n+1)+\sum_{m=1}^{100}(-n+m)-\sum_{m=1}^{n}(-n+m)$$

$$=n^2-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-100n+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{50}{\cancel{100}}\cdot 101+n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\cancel{n^2}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-100n+5050+n^2-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{n^2}-\frac{1}{2}n$$

$$=n^2-101n+5050=n^2-101n+\frac{101^2}{4}+5050-\frac{101^2}{4}=\left(n-\frac{101}{2}\right)^2+5050-\frac{101^2}{4}$$

よって，$S$の最小値は $n=50$ のとき，または $n=51$ のとき，であるが

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times\ 51 \\ \hline 51 \\ 255\ \\ \hline 2601 \end{array}\qquad\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 51 \\ \hline 101 \\ 505\ \\ \hline 5151 \end{array}$$

$n=50$ のとき　$S=2500-5050+5050=2500$

$n=51$ のとき　$S=2601-5151+5050=2500$　より

$S$は，$n=50,\ 51$のとき最小値　2500　をとる

(ii) $n\leqq 0$ のとき

$$S=\sum_{m=1}^{100}(-n+m)=-100n+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{50}{\cancel{100}}\cdot 101=-100n+5050$$ より

$S$は $n=0$ のとき最小値 5050をとる．

(iii) $n\geqq 101$ のとき

$$S=\sum_{m=1}^{100}(n-m)=100n-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{50}{\cancel{100}}\cdot 101=100n-5050$$ より

$$\begin{array}{r} 10100 \\ -\ 5050 \\ \hline 5050 \end{array}$$

$S$は $n=101$ のとき，最小値　5050 をとる．

(i)(ii)(iii) より　$S$は，$n=50,\ 51$のとき最小値　2500　をとる