京大理系 1962前期 ②

(イ) $kx^2+ky^2+x^2+y^2-ax-kby=0$. $k(x^2+y^2-by)+x^2+y^2-ax=0$ ―①

$$\begin{cases} x^2+y^2=by \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

$ax=by$. $y=\frac{a}{b}x$

$x^2+\frac{a^2}{b^2}x^2=ax$, $\frac{a^2+b^2}{b^2}x^2=ax$, $x^2=\frac{ab^2}{a^2+b^2}x$, $x=0,\ \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=0,\ \frac{a^2b}{a^2+b^2}$

$(x,y)=(0,0),\ \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$のとき ①は kの値によらず成り立つ.

よって $(0,0),\ \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ を通る.

(ロ) $x^2+y^2-\frac{a}{k+1}x-\frac{kb}{k+1}y=0$　$x^2-\frac{a}{k+1}x+\frac{a^2}{4(k+1)^2}+y^2-\frac{kb}{k+1}y+\frac{k^2b^2}{4(k+1)^2}=\frac{a^2}{4(k+1)^2}+\frac{k^2b^2}{4(k+1)^2}$

$\left\{x-\frac{a}{2(k+1)}\right\}^2+\left\{y-\frac{kb}{2(k+1)}\right\}^2=\frac{a^2}{4(k+1)^2}+\frac{k^2b^2}{4(k+1)^2}$ より 円の中心は $\left(\frac{a}{2(k+1)}, \frac{kb}{2(k+1)}\right)$

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2(k+1)} \\ y=\frac{kb}{2(k+1)} \end{cases}$$

$\frac{1}{2(k+1)}=\frac{x}{a}$

(イ)より $(0,0)$は円の中心にならないから $x\neq0$ より $k+1=\frac{a}{2x}$, $k=\frac{a}{2x}-1$

$y=\frac{x}{a}\left(\frac{a}{2x}-1\right)b=\frac{1}{2}b-\frac{b}{a}x$. $ay=\frac{1}{2}ab-bx$. $bx+ay=\frac{1}{2}ab$ ―②

$x=\frac{a}{2(k+1)}$ より kが $k\neq-1$ の範囲で動くとき, xは $x\neq0$ の範囲で動く ―③

②③より $bx+ay=\frac{1}{2}ab\ (x\neq0)$