京大理系　1963前期　①

(イ) $(a+c)^2-4(ac-b^2)=a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2=(a-c)^2+4b^2\geqq 0$ より題意は示された.

(ロ) 方程式の解は $\dfrac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$ であるから $\alpha=\dfrac{a+c}{2}-\dfrac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$, $\beta=\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

よって $\dfrac{\{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq\}^2}{4(p^2+q^2)^2}\leqq\dfrac{(a-c)^2+4b^2}{4}$ —① が成り立つならば、つねに $\alpha\leqq\lambda\leqq\beta$ が成り立つ.

①は $(a-c)^2(p^2-q^2)^2+8(a-c)(p^2-q^2)bpq+16b^2p^2q^2\leqq(a-c)^2(p^2+q^2)^2+4(p^2+q^2)^2b^2$

$(a-c)^2(\cancel{p^4}+2p^2q^2+\cancel{q^4}-\cancel{p^4}+2p^2q^2-\cancel{q^4})-8(a-c)(p^2-q^2)bpq+(4p^4+8p^2q^2+4q^4-16p^2q^2)b^2\geqq 0$

$4(a-c)^2p^2q^2-8(a-c)pq(p^2-q^2)b+4(p^2-q^2)^2b^2\geqq 0$

$\{(a-c)pq-(p^2-q^2)b\}^2\geqq 0$ と変形できるから ①は成り立つ

ゆえに、つねに $\alpha\leqq\lambda\leqq\beta$ が成り立つ