

(イ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  より  $f(x) = 0$  は  $\epsilon + \delta < \epsilon + 1$  の実数解を持つから

$A, B, C$  を実数とし  $f(x) = (x+A)(x^2+Bx+C)$  と書ける。

(ロ) (i) 3根がすべて実数のとき

これは  $\alpha, \beta, \gamma$  は実数,  $\alpha < 0, \beta < 0, \gamma < 0$  とし  $\alpha, \beta, \gamma$  と書ける。

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}(x-\gamma)$$

$$= x^3 - \gamma x^2 - (\alpha+\beta)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{cases} a = -\alpha - \beta - \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma \\ c = -\alpha\beta\gamma \end{cases} \quad \text{よって } a > 0, b > 0, c > 0.$$

(ii) 3根が1の実数と2の虚数のとき

これは  $\alpha, \beta, \gamma$  は実数,  $\alpha < 0, \beta < 0$  とし  $\alpha, \beta+i\gamma, \beta-i\gamma$  と書ける。

$$(x-\alpha)(x-\beta-i\gamma)(x-\beta+i\gamma) = (x-\alpha)\{x^2 - 2\beta x + \beta^2 + \gamma^2\} = (x-\alpha)(x^2 - 2\beta x + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$= x^3 - 2\beta x^2 + (\beta^2 + \gamma^2)x - \alpha x^2 + 2\alpha\beta x - \alpha(\beta^2 + \gamma^2) = x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + \gamma^2)$$

$$\begin{cases} a = -\alpha - 2\beta \\ b = 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 \\ c = -\alpha(\beta^2 + \gamma^2) \end{cases} \quad \text{よって } a > 0, b > 0, c > 0.$$