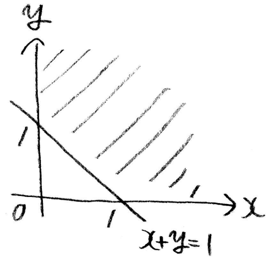
京大理系　1969前期　⑥



$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \geqq 1$ である領域は左図の斜線部である
境界線上の点含む。

xの値が大きくなればなるほど、また yの値が大きくなればなるほど
$f(x, y)$の値は大きくなるから、
$f(x, y)$の最小値を与える点は、$x+y=1$ 上にある。

$x+y=1$ 上の点 $(\alpha, 1-\alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ を考える
このとき $f(x, y) = \sqrt{\alpha} + a\sqrt{1-\alpha}$

$g(\alpha) = \sqrt{\alpha} + a\sqrt{1-\alpha}$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ とする。

$g'(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + a\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-\alpha}}$

$g'(\alpha)=0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{a}{\sqrt{1-\alpha}}$, $a^2\alpha = 1-\alpha$, $\alpha = \frac{1}{a^2+1}$

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{a^2+1}$	$\cdots$	1
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$	a	$\nearrow$	$\sqrt{a^2+1}$	$\searrow$	1

$g(\alpha)$の増減表は左表のようになる

※ $g\left(\frac{1}{a^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + a\sqrt{\frac{a^2+1-1}{a^2+1}} = \frac{1+a^2}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1}$

よって、$f(x, y)$の最小値は、$a \leqq 1$ のとき a, $a>1$ のとき 1