京大理系　1970前期　⑤

$F'(x)=x\sin^3 x$，$F'(x)=0$ のとき，$x=n\pi$ $(n=1,2\cdots)$

$x=(2m-1)\pi$ $(m=1,2\cdots)$ の前後で $F'(x)$ の符号は正から負になるから，このとき $F(x)$ は極大値をとる．

$x=2m\pi$ $(m=1,2\cdots)$ の前後で $F'(x)$ の符号は負から正になるから，このとき $F(x)$ は極小値をとる．

$$F\{(2m-1)\pi\}=\int_0^{(2m-1)\pi}t\sin^3 t\,dt=\int_0^{(2m-1)\pi}t\,\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}dt=\frac{3}{4}\int_0^{(2m-1)\pi}t(-\cos t)'dt-\frac{1}{4}\int_0^{(2m-1)\pi}t\left(-\frac{\cos 3t}{3}\right)'dt$$

※ $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\theta$

$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$$=-\frac{3}{4}\Big[t\cos t\Big]_0^{(2m-1)\pi}+\frac{3}{4}\int_0^{(2m-1)\pi}\cos t\,dt+\frac{1}{12}\Big[t\cos 3t\Big]_0^{(2m-1)\pi}-\frac{1}{12}\int_0^{(2m-1)\pi}\cos 3t\,dt$$

$$=\frac{3}{4}(2m-1)\pi+\frac{3}{4}\Big[\sin t\Big]_0^{(2m-1)\pi}-\frac{1}{12}(2m-1)\pi-\frac{1}{12}\left[\frac{\sin 3t}{3}\right]_0^{(2m-1)\pi}=\frac{2}{3}(2m-1)\pi$$

よって，$F(x)$ は $x=(2m-1)\pi$ のとき，極大値 $\frac{2}{3}(2m-1)\pi$ をとる．