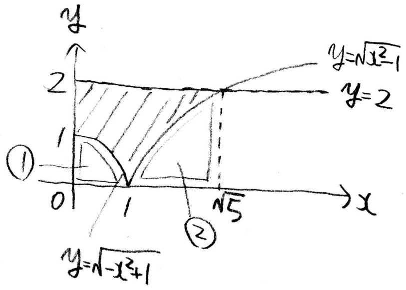
京大理系 1997前期 ④

$x^2-1 \geqq 0$, $|x| \geqq 1$のとき、$y=\sqrt{x^2-1}$

$x^2-1 \leqq 0$、$0 \leqq |x| \leqq 1$のとき、$y=\sqrt{-x^2+1}$



※ $\sqrt{x^2-1}=2$のとき、$x^2-1=4$、$x=\pm\sqrt{5}$

①をx軸のまわりに回転してえられる回転体の体積は

$$\int_0^1 \pi(-x^2+1)dx=\pi\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\pi\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\pi$$

②をx軸のまわりに回転してえられる回転体の体積は

$$\int_1^{\sqrt{5}} \pi(x^2-1)dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}}=\pi\left(\frac{5}{3}\sqrt{5}-\sqrt{5}-\frac{1}{3}+1\right)=\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\right)\pi$$

求める体積をVとすると、対称性より

$$V=2\left(\pi\cdot4\cdot\sqrt{5}-\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{3}\sqrt{5}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=2\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}\pi-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}(5\sqrt{5}-2)\pi$$