

京大理系 1977前期 (2)

$$f(x) = a x \left(1 - \frac{1+a^2}{a} x^2\right), \quad f(x)=0 \text{ のとき } x=0, \pm \sqrt{\frac{a}{1+a^2}} \quad C = \sqrt{\frac{a}{1+a^2}}$$

$$S_a = \left[a \frac{x^2}{2} - (1+a^2) \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{\frac{a}{1+a^2}}} = \frac{a}{2} \frac{a}{1+a^2} - \frac{1+a^2}{4} \frac{a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{1}{a^2} + a^2}$$

$\frac{1}{a^2} + a^2$ の値が最小のとき、 S_a の値が最大。

$$\text{相加平均} \geq \text{相乗平均} \text{ より } \frac{\frac{1}{a^2} + a^2}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a^2} a^2} = 1. \quad \text{等号は } \frac{1}{a^2} = a^2, \quad a=1 \text{ のとき成立} \rightarrow$$

よって、 $a=1$ 。