京大理系 1980前期 ②

$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$ より

放物線の頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$ であり これが $y=-2x+5$ 上にあるから

$-\frac{b^2}{4a}=\frac{b}{a}+5$, $-b^2=4b+20a$. $a=-\frac{1}{20}b^2-\frac{1}{5}b$

$-\frac{1}{20}b^2-\frac{1}{5}b=0$. のとき $b^2+4b=0$ $b=-4, 0$ より $a<0$ のとき $b<-4$ または $b>0$

よって $a=-\frac{1}{20}b^2-\frac{1}{5}b$ $(b>0)$ とおける

$ax^2+bx=0$ のとき $ax\left(x+\frac{b}{a}\right)=0$. $x=0, -\frac{b}{a}$ より

放物線とx軸とが囲む面積は $\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}\right]_0^{-\frac{b}{a}}=-\frac{\cancel{a}}{3}\frac{b^3}{a^{\cancel{3}2}}+\frac{b}{2}\frac{b^2}{a^2}$

$=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{b^3}{6\left\{-\frac{b}{20}(b+4)\right\}^2}=\frac{b^{\cancel{3}}}{\frac{3}{200}b^2(b+4)^2}=\frac{200}{3}\frac{b}{(b+4)^2}$

$f(b)=\frac{b}{(b+4)^2}$ $(b>0)$ とする

$f'(b)=\frac{(b+4)^2-b\cdot 2(b+4)}{(b+4)^4}=\frac{\cancel{(b+4)}(b+4-2b)}{(b+4)^{\cancel{4}3}}=\frac{-b+4}{(b+4)^3}$ $f'(b)=0$ のとき $b=4$

b	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(b)$	$+$	0	$-$
$f(b)$	↗	$\frac{1}{16}$	↘

$f(b)$の増減表は左表

よって面積は $b=4$ のとき最大値 $\frac{\cancel{200}^{25}}{3}\frac{1}{\cancel{16}_{2}}=\frac{25}{6}$ をとる

※ $f(4)=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$