京大理系 1983前期 ③ , 京大文系 1983前期 ③

(1) $a\neq0$ のとき $ab+cd=0$ より $b=-\frac{cd}{a}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}&-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{d}{a}\\\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}&\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{d}{a}\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}&-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\\\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}&\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{d}{a}\end{pmatrix}$$ より

$u=\frac{d}{a}$, $v=\sqrt{a^2+c^2}$, θ は $0\leqq\theta<2\pi$ $\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$ $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$ を満たす値, とすれば

$$A=\begin{pmatrix}v\cos\theta&-v\sin\theta\\v\sin\theta&v\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&u\end{pmatrix}\ —①$$

$a=0$ のとき, $cd=0$ $-bc\neq0$ より $c\neq0$ $d=0$

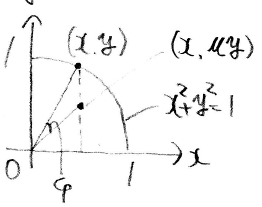
$$A=\begin{pmatrix}0&b\\c&0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&\frac{b}{c}\\1&0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{b}{c}\end{pmatrix}$$ より

$u=-\frac{b}{c}$, $v=c$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ とすれば

$$A=\begin{pmatrix}v\cos\theta&-v\sin\theta\\v\sin\theta&v\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&u\end{pmatrix}\ —②$$

①②より題意は示された

(2)



$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1&0\\0&u\end{pmatrix}$ により $\begin{pmatrix}x\\uy\end{pmatrix}$ に移る

$0<u<1$ より左図のようになるから左図のように φ をとると $0\leqq\varphi<\frac{\pi}{2}$

$\begin{pmatrix}x\\uy\end{pmatrix}$ は $v\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ により原点を中心に θ 回転して、さらに大きさが v 倍になる

$0\leqq\theta<2\pi$, $\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$ $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+c}}$, $a\geqq0$, $c\geqq0$ のとき $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

よって、$\gamma=-\varphi+\theta$

θ は一定であるから、φ が最小のとき γ は最大となる

φ は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ のとき最小値 0 をとる

よって $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$