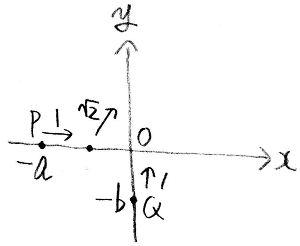
京大理系　1983前期　⑤



時刻tにおけるP,Qの座標は $(-a+t,0),(0,-b+t)$

時刻tからPがQに到達する時刻までの時間をu

到達する座標を$(0,Y)$とすると

$\sqrt{(-a+t)^2+Y^2}=\sqrt{2}u$ —①

$Y-(-b+t)=u$ —②

①②より $(t-a)^2+u^2+2(t-b)u+(t-b)^2=2u^2$, $u^2-2(t-b)u-(t-a)^2-(t-b)^2=0$

$u=t-b\pm\sqrt{(t-b)^2+(t-a)^2+(t-b)^2}$, $u>0$より $u=t-b+\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}$

$$\frac{du}{dt}=1+\frac{1}{2}\frac{2(t-a)+\overset{2}{\cancel{4}}(t-b)}{\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}}.$$

$\frac{du}{dt}=0$のとき $\frac{a+2b-3t}{\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}}=1$. $(a+2b)^2-6(a+2b)t+9t^2=t^2-2at+a^2+2t^2-4bt+2b^2$

$6t^2+(-4a-8b)t+4ab+2b^2=0$. $3t^2-2(a+2b)t+2ab+b^2=0$.

$$t=\frac{a+2b\pm\sqrt{a^2+4ab+4b^2-6ab-3b^2}}{3}=\frac{a+2b\pm\sqrt{(b-a)^2}}{3}=\frac{a+2b\pm(b-a)}{3}=b,\ \frac{2a+b}{3}$$

$t=b$のとき $a+2b-3t=a-b<0$ より不適

$t=\frac{2a+b}{3}$のとき $a+2b-3t=-a+b>0$

よって $t=\frac{2a+b}{3}$

t	…	$\frac{2a+b}{3}$	…
$\frac{du}{dt}$	−	0	+
u	↘	最小	↗

uの増減表は左表

ゆえに $t=\frac{2a+b}{3}$

※ $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=1-\frac{a+2b}{\sqrt{a^2+2b^2}}=1-\frac{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+2b^2}}<0$