京大理系 1987前期 ③

$a(\cos^2\theta-1+\cos^2\theta)+b\cos\theta-1<0$, $2a\cos^2\theta+b\cos\theta-a-1<0$

(i) $a\neq0$ のとき.

$2a\cos^2\theta+b\cos\theta-a-1=2a\left(\cos^2\theta+\frac{b}{2a}\cos\theta+\frac{b^2}{16a^2}\right)-\frac{b^2}{8a}-a-1=2a\left(\cos\theta+\frac{b}{4a}\right)^2-\frac{b^2}{8a}-a-1$

$f(x)=2ax^2+bx-a-1=2a\left(x+\frac{b}{4a}\right)^2-\frac{b^2}{8a}-a-1$ とする.

(i-i) $a>0$ のとき

$f(-1)<0$ かつ $f(1)<0$ であればよい.

$f(-1)=2a-b-a-1=a-b-1$, $f(1)=2a+b-a-1=a+b-1$ より

$a-b-1<0$ かつ $a+b-1<0$, $b>a-1$ かつ $b<-a+1$ であればよい.

(i-ii) $a<0$ のとき

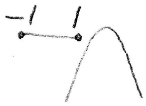
(i-ii-i) $-\frac{b}{4a}<-1$, $b<4a$ のとき.

$f(-1)<0$ であればよい.

$f(-1)=a-b-1$ より

$b>a-1$ であればよい.

(i-ii-ii) $-\frac{b}{4a}>1$. $b>-4a$ のとき



$f(1)<0$ であればよい.

$f(1)=a+b-1$ より

$b<-a+1$ であればよい.

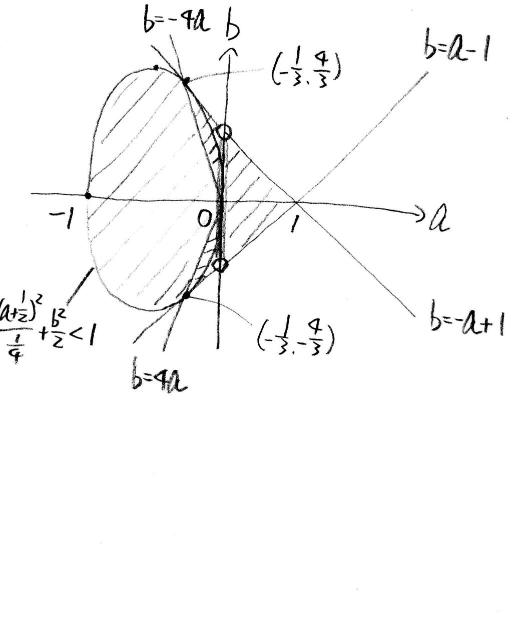
(i-ii-iii) $-1\leqq-\frac{b}{4a}\leqq1$, $4a\leqq b\leqq-4a$ のとき.

$-\frac{b^2}{8a}-a-1<0$ であればよい

$b^2+8a^2+8a<0$. $8\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)-2+b^2<0$. $\frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{b^2}{2}<1$ であればよい

(ii) $a=0$ のとき.

$b\cos\theta-1<0$. $b\cos\theta<1$. $-1<b<1$ であればよい.



求める点(a, b)の範囲は左図の斜線部

境界上の点は含まない.

※ $b=a-1$ と $b=4a$ の交点の座標は

$a-1=4a$. $a=-\frac{1}{3}$. $b=-\frac{4}{3}$ より $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$b^2+8a^2+8a=0$ と $b=-a+1$ の交点の座標は.

$a^2-2a+1+8a^2+8a=0$. $(3a+1)^2=0$ $a=-\frac{1}{3}$. $b=\frac{4}{3}$ より $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$b^2+8a^2+8a=0$ と $b=-4a$ の交点の座標は.

$16a^2+8a^2+8a=0$ $(3a+1)a=0$. $a=-\frac{1}{3}, 0$. $b=\frac{4}{3}, 0$ より

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $(0, 0)$