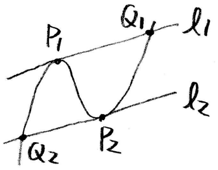
京大理系　1987前期　④

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x^2+\frac{2a}{3}x+\frac{a^2}{9}\right)-\frac{a^2}{3}+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$ より

$m<-\frac{a^2}{3}+b$ のとき 0本，$m=-\frac{a^2}{3}+b$ のとき 1本，$m>-\frac{a^2}{3}+b$ のとき 2本

(2)



P_1, P_2, Q_1, Q_2 の x 座標を p_1, p_2, q_1, q_2 とすると，

$|p_1-q_1|=|p_2-q_2|$ を示せばよい．

$3x^2+2ax+b=m$ は異なる2つの実数解 p_1, p_2 を持つ．

l_1 の方程式は $y-f(p_1)=m(x-p_1)$

$x^3+ax^2+bx+c=mx-mp_1+f(p_1)$

$x^3+ax^2+(b-m)x+c+mp_1-f(p_1)=0$

$(x-p_1)^2(x+a+2p_1)=0$

より $q_1=-a-2p_1$

同様に $q_2=-a-2p_2$

$$
\begin{array}{r}
x+a+2p_1 \\
x^2-2p_1x+p_1^2 \,\big)\, x^3+ax^2+(b-m)x+c+mp_1-f(p_1) \\
x^3-2p_1x^2+p_1^2x \\
\hline
(a+2p_1)x^2+(b-m-p_1^2)x+c+mp_1-f(p_1)
\end{array}
$$

$(p_1-q_1)^2=(3p_1+a)^2=9p_1^2+6ap_1+a^2=3(3p_1^2+2ap_1)+a^2=3(-b+m)+a^2$ —①

$(p_2-q_2)^2=(3p_2+a)^2=9p_2^2+6ap_2+a^2=3(3p_2^2+2ap_2)+a^2=3(-b+m)+a^2$ —②

①②より $|p_1-q_1|=|p_2-q_2|$ より題意は示された．