京大理系　1987前期　⑤

(1) 平面の法線ベクトルは $(a, 1, 1)$

(ka, k, k) が平面上にあるとき, $ka^2+k+k+a-2=0$.　$k=\dfrac{-a+2}{a^2+2}$

よって $\left(\dfrac{-a^2+2a}{a^2+2}, \dfrac{-a+2}{a^2+2}, \dfrac{-a+2}{a^2+2}\right)$ — ①

(2) ①と原点の距離の2乗は $\dfrac{(a-2)^2}{(a^2+2)^2}(a^2+1+1)=\dfrac{(a-2)^2}{a^2+2}$

$f(a)=\dfrac{(a-2)^2}{a^2+2}$ とする

$$f'(a)=\frac{2(a-2)(a^2+2)-(a-2)^2\cdot 2a}{(a^2+2)^2}=\frac{2(a-2)(\cancel{a^2}+2-\cancel{a^2}+2a)}{(a^2+2)^2}=\frac{4(a+1)(a-2)}{(a^2+2)^2}$$

$f'(a)=0$ のとき $a=-1, 2$

a	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

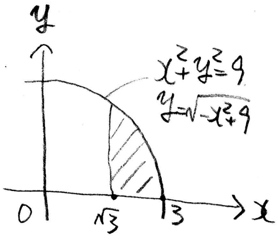
$f(a)$ の増減表は左表

$f(a)$ は $a=-1$ のとき最大値 3 をとる

$f(a)=\dfrac{a^2-4a+4}{a^2+2}=\dfrac{1-\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}}{1+\frac{1}{a^2}}$ より $\displaystyle\lim_{a\to\pm\infty}f(a)=1$

よって ①と原点の距離は $a=-1$ のとき最大値 $\sqrt{3}$ をとる

$f(-1)=\dfrac{9}{3}=3$



求める値は左図の斜線部を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積に等しいから

$$\int_{\sqrt{3}}^{3}\pi(-x^2+9)\,dx=\pi\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{\sqrt{3}}^{3}$$

$$=\pi(-9+27+\sqrt{3}-9\sqrt{3})=(18-8\sqrt{3})\pi$$

$V(a)$ が最小になる a は -1

そのときの $V(a)$ の値は $(18-8\sqrt{3})\pi$