京大理系 1988前期 ①

(1) $g(x)-x=f(x)^2+af(x)+b-x$

$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x+a\}+x^2+(a-1)x+b$

$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x+a+1\}$

より 題意は示された

$$
\begin{array}{r}
f(x)+x+a \\
f(x)-x \,\big)\, \overline{f(x)^2+af(x)-x+b} \\
\underline{f(x)^2-xf(x)} \\
(x+a)f(x)-x+b \\
\underline{(x+a)f(x)-x^2-ax} \\
x^2+(a-1)x+b
\end{array}
$$

(2) $g(p)-p=\{f(p)-p\}\{f(p)+p+a+1\}$ より $g(p)=p$ のとき $f(p)=p$ または $f(p)+p+a+1=0$ —①

$f(x)+x+a+1=0$. $x^2+(a+1)x+a+b+1=0$ が少なくとも1つの実数解を持つとき

$(a+1)^2-4(a+b+1)\geqq 0$. $a^2+2a+1-4a-4b-4\geqq 0$. $b\leqq \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}$ —②

$f(x)+x+a+1=0$ の解 x が $f(x)=x$ を満たすとき $x=-\frac{a+1}{2}$

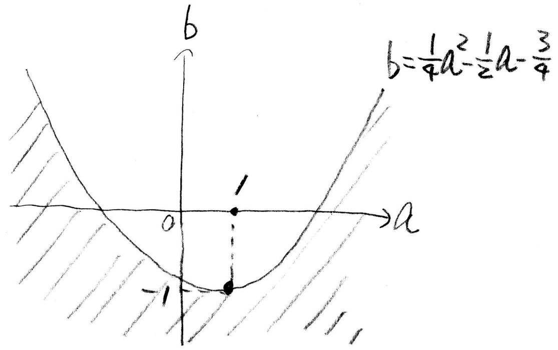
$x^2+(a+1)x+a+b+1=0$ が $-\frac{a+1}{2}$ を解に持つとき

$\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2+2a+1}{2}+a+b+1=0$. $a^2+2a+1-2a^2-\cancel{4a}-2+\cancel{4a}+4b+4=0$. $b=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}$

このとき $x^2+(a+1)x+a+b+1=0$ は $x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}=0$. $(x+\frac{a+1}{2})^2=0$ となるから

重解 $-\frac{a+1}{2}$ を持つ —③

①②③より (a, b) の範囲は右図の斜線部



※境界線上の点含まない

$\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(a^2-2a+1)-1=\frac{1}{4}(a-1)^2-1$