京大文系 1989前期 ④

(1) T_Pの方程式は $y-(c^3-ac)=(3c^2-a)(x-c)$

$x^3-ax=(3c^2-a)x-3c^3+\cancel{ac}+c^3-\cancel{ac}$

$x^3-3c^2x+2c^3=0$

$(x-c)^2(x+2c)=0$ より

Qの座標は $(-2c,\ -8c^3+2ac)$

$$\begin{array}{r} x+2c \\ x^2-2cx+c^2 \overline{) \; x^3 \qquad -3c^2x+2c^3} \\ \underline{x^3-2cx^2+c^2x \qquad\quad} \\ 2cx^2-4c^2x+2c^3 \\ \underline{2cx^2-4c^2x+2c^3} \\ 0 \end{array}$$

(2) 点Qにおけるこのグラフへの接線の傾きは $3(-2c)^2-a=12c^2-a$

T_Pの傾きは $3c^2-a$

$(12c^2-a)(3c^2-a)=-1$, $36c^4-15ac^2+a^2+1=0$ —① となるようなcの数を求めればよい

Xについての2次方程式 $36X^2-15aX+a^2+1=0$ —② を考える

$36X^2-15aX+a^2+1=36\left(X^2-\frac{15a}{36}X+\frac{225a^2}{5184}\right)-\frac{225a^2}{144}+a^2+1=36\left(X-\frac{15a}{72}\right)^2+\frac{144-81a^2}{144}$

$144-81a^2=0$ のとき $a^2=\frac{144}{81}$, $a=\pm\frac{12}{9}=\pm\frac{4}{3}$

よって ②は $a>0$ かつ $a>\frac{4}{3}$ すなわち $a>\frac{4}{3}$ のとき $X>0$の範囲に異なる2つの実数解を持つ

$a>0$ かつ $a=\frac{4}{3}$ すなわち $a=\frac{4}{3}$ のとき $X>0$の範囲にただ1つの実数解を持つ

ゆえに ①を満たすcの数は $a<\frac{4}{3}$ のとき 0個, $a=\frac{4}{3}$ のとき 2個, $a>\frac{4}{3}$ のとき 4個

以上より $a<\frac{4}{3}$ のとき 0個, $a=\frac{4}{3}$ のとき 2個, $a>\frac{4}{3}$ のとき 4個