京大理系 1989前期 ③

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$ とする.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\begin{array}{r} \frac{x}{3}+\frac{b}{9a} \\ 3ax^2+2bx+c \,\big)\, ax^3+bx^2+cx+d \\ ax^3+\frac{2bx^2}{3}+\frac{cx}{3} \\ \hline \frac{bx^2}{3}+\frac{2cx}{3}+d \\ \frac{bx^2}{3}+\frac{2b^2x}{9a}+\frac{bc}{9a} \\ \hline \frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a} \end{array}$$

$f(x)=\left(\frac{x}{3}+\frac{b}{9a}\right)f'(x)+\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$

題意より $c-\frac{b^2}{3a}=0$. $b^2-3ac=0$

$3ax^2+2bx+c=0$ は $b^2-3ac=0$ より重解を持つ. これを α とする.

$f'(x)=0$ のとき $x=\alpha$

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減表は左表

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

$a<0$ のとき

$f(x)$ の増減表は左表

以上より題意は示された.