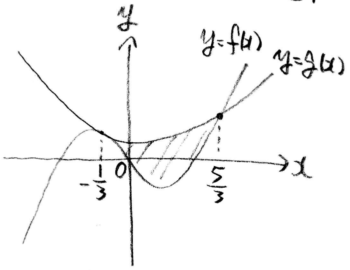
京大理系 1990前期 ①

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-a$ とする. $f'(x)=3x^2-1$, $g'(x)=2x$

$f'(x)=g'(x)$ より $3x^2-1=2x$, $3x^2-2x-1=0$. $x=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}=\frac{1\pm2}{3}=-\frac{1}{3}, 1$ より Pのx座標は $-\frac{1}{3}, 1$

(i) Pのx座標が$-\frac{1}{3}$のとき

$f(-\frac{1}{3})=g(-\frac{1}{3})$ より $-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}=\frac{1}{9}-a$, $a=\frac{3-9+1}{27}=-\frac{5}{27}$



$x^3-x=x^2+\frac{5}{27}$　$x^3-x^2-x-\frac{5}{27}=0$

$(x+\frac{1}{3})^2(x-\frac{5}{3})=0$ より

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点のx座標は $-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$

$$
\begin{array}{r}
x-\frac{5}{3} \\
x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\ \big)\ x^3-x^2-x-\frac{5}{27} \\
x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x \\
\hline
-\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{27} \\
-\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{27} \\
\hline
0
\end{array}
$$

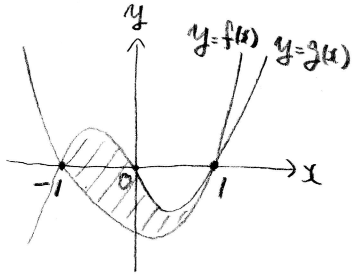
求める面積は上図の斜線部の面積であるから

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}(x^2-a-x^3+x)\,dx=-\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}(x+\tfrac{1}{3})^2(x-\tfrac{5}{3})\,dx=-\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}(x+\tfrac{1}{3})^2(x+\tfrac{1}{3}-2)\,dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{-(x+\tfrac{1}{3})^3+2(x+\tfrac{1}{3})^2\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{(x+\frac{1}{3})^4}{4}+2\frac{(x+\frac{1}{3})^3}{3}\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}=-\frac{16}{4}+2\cdot\frac{8}{3}=\frac{-12+16}{3}=\frac{4}{3}$$

(ii) Pのx座標が1のとき

$f(1)=g(1)$ より $1-1=1-a$　$a=1$



$x^3-x=x^2-1$, $x^3-x^2-x+1=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$ より

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点のx座標は $-1, 1$

$$
\begin{array}{r}
x+1 \\
x^2-2x+1\ \big)\ x^3-x^2-x+1 \\
x^3-2x^2+x \\
\hline
x^2-2x+1 \\
x^2-2x+1 \\
\hline
0
\end{array}
$$

求める面積は上図の斜線部の面積であるから

$$\int_{-1}^{1}(x^3-x-x^2+1)\,dx=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$$