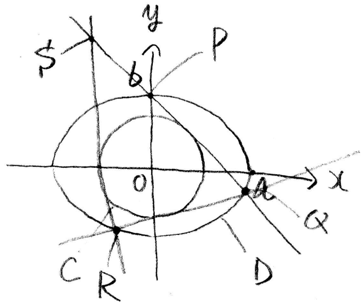
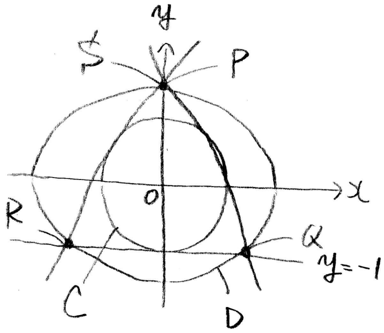
京大理系 1990前期 ⑥




題意を満たすには右上図のようであればよい

Pを通る直線は $y=kx+b$ と書ける $k<0$ とする

これがCに接するとき $x^2+k^2x^2+2bkx+b^2=1$. $(k^2+1)x^2+2bkx+b^2-1=0$ が重解を持つから

$b^2k^2-(k^2+1)(b^2-1)=0$ $k^2-b^2+1=0$ $k=\pm\sqrt{b^2-1}$ $k<0$より $k=-\sqrt{b^2-1}$

よって PからCにひいた接線の方程式は $y=-\sqrt{b^2-1}x+b$

これとDの交点のy座標が $-1$, $b$ であればよいから

$\frac{1}{a^2}\left(\frac{b-y}{\sqrt{b^2-1}}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ $b^2(b^2-2by+y^2)+a^2(b^2-1)y^2=a^2b^2(b^2-1)$

$(a^2b^2-a^2+b^2)y^2-2b^3y-a^2b^4+a^2b^2+b^4=0$

$\left[\{a^2(b^2-1)+b^2\}y+b\{a^2(b^2-1)-b^2\}\right](y-b)=0$

$\left\{y+\frac{a^2(b^2-1)-b^2}{a^2(b^2-1)+b^2}b\right\}(y-b)=0$ より

$\frac{a^2(b^2-1)-b^2}{a^2(b^2-1)+b^2}b=1$ $a^2(b^3-b)-b^3=a^2(b^2-1)+b^2$ $a^2(b^3-b^2-b+1)=b^3+b^2$

$a^2=\frac{b^2\cancel{(b+1)}}{(b-1)^2\cancel{(b+1)}}$ $a=\frac{b}{b-1}$

$$\begin{array}{r}
(a^2b^2-a^2+b^2)y+a^2b^3-a^2b-b^3 \\
y-b\;\big)\;(a^2b^2-a^2+b^2)y^2-2b^3y-a^2b^4+a^2b^2+b^4 \\
(a^2b^2-a^2+b^2)y^2+(-a^2b^3+a^2b-b^3)y \\
\hline
(a^2b^3-a^2b-b^3)y-a^2b^4+a^2b^2+b^4 \\
(a^2b^3-a^2b-b^3)y-a^2b^4+a^2b^2+b^4 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
b^2\qquad -1 \\
b-1\;\big)\;b^3-b^2-b+1 \\
b^3-b^2\qquad \\
\hline
-b+1 \\
-b+1 \\
\hline
0
\end{array}$$