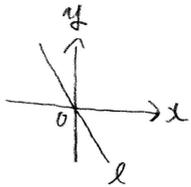


(1) 平面上の点 (X, Y) の像は $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-Y \\ -2X+2Y \end{pmatrix} = (X-Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



l の方向ベクトルは $(1, -2)$

$X-Y$ は全 \mathbb{R} の実数値を取り得る

以上より題意は示された

(2) P を通り l と直交する直線上の点は $(X, Y) + t(2, 1) = (2t+X, t+Y)$ と書ける

これが l 上にあるとき $4t+2X+t+Y=0, t = -\frac{2}{5}X - \frac{1}{5}Y$

Q の座標は $(-\frac{4}{5}X - \frac{2}{5}Y + X, -\frac{2}{5}X - \frac{1}{5}Y + Y) = (\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}Y, -\frac{2}{5}X + \frac{4}{5}Y) = (\frac{1}{5}X - \frac{2}{5}Y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(1) より、 Q による像が Q となる点 (X, Y) は $X-Y = \frac{1}{5}X - \frac{2}{5}Y$ ① を満たす

原点を通り ① と直交する直線上の点は $t(1, -1) = (t, -t)$ と書ける

これが ① 上にあるとき $t+t = \frac{1}{5}X - \frac{2}{5}Y, t = \frac{1}{10}X - \frac{1}{5}Y$

P の座標は $(\frac{1}{10}X - \frac{1}{5}Y, -\frac{1}{10}X + \frac{1}{5}Y)$

(3) f を表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$f \circ f \circ f$ を表す行列は $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -20 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

よって $f \circ f \circ f = f$

$g \circ f \circ g$ を表す行列は $\frac{1}{100} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

よって $g \circ f \circ g = g$