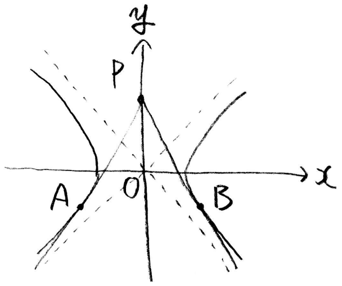
京大理系　1993前期　①



Pを通る直線は $y=kx+p$ と書ける

$x^2-k^2x^2-2pkx-p^2=1$. $(k^2-1)x^2+2pkx+p^2+1=0$ が重解を持てばよいから

$p^2k^2-(k^2-1)(p^2+1)=0$. $\cancel{p^2k^2}-\cancel{p^2k^2}-k^2+p^2+1=0$　$k=\pm\sqrt{p^2+1}$

$p^2x^2\pm 2p\sqrt{p^2+1}\,x+p^2+1=0$　$(px\pm\sqrt{p^2+1})^2=0$.　$x=\mp\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$

$\frac{p^2+1}{p^2}-y^2=1$.　$y=-\frac{1}{p}$ より　A.Bの座標は $\left(\mp\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}, -\frac{1}{p}\right)$

△PABの面積を $f(p)$ とすると　$f(p)=\frac{\cancel{2}\sqrt{p^2+1}}{p}\left(p+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$

$f'(p)=\frac{\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{p^2+1}\cdot\cancel{2}p\cdot p^2-(p^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 2p}{p^{\cancel{4}3}}=\frac{\sqrt{p^2+1}(3p^2-2p^2-2)}{p^3}=\frac{\sqrt{p^2+1}(p^2-2)}{p^3}$　$f'(p)=0$ のとき $p=\sqrt{2}$

p	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(p)$	$-$	0	$+$
$f(p)$	↘	最小	↗

$f(p)$ の増減表は左表

よって　$p=\sqrt{2}$