京大理系 1993前期 ⑤

0回奇数の目が出る確率は $\dfrac{{}_{2n}C_0}{2^{2n}}$

1回 〃 $\dfrac{{}_{2n}C_1}{2^{2n}}$

⋮

$n-1$回 〃 $\dfrac{{}_{2n}C_{n-1}}{2^{2n}}$

よって. $p_n=1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}C_k}{2^{2n}}$

$2^{2n}=(1+1)^{2n}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k=2\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}C_k+{}_{2n}C_n$ より

$$p_n=\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+\frac{1}{2}{}_{2n}C_n}{2^{2n}}=\frac{1}{2}+\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n+1}} \quad ―①$$

$$\frac{{}_{2\cdot1}C_1}{2^{2\cdot1+1}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \quad ―②$$

$\dfrac{{}_{2k}C_k}{2^{2k+1}}\geqq\dfrac{1}{4k}$ が成り立つと仮定する

$$\frac{{}_{2(k+1)}C_{k+1}}{2^{2(k+1)+1}}=\frac{\cancel{(2k+2)}(2k+1)\cdot(2k)!}{\cancel{(k+1)}\cdot k!\cdot(k+1)\cdot k!}\frac{1}{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 2^{2k+1}}=\frac{2k+1}{2(k+1)}\frac{{}_{2k}C_k}{2^{2k+1}}\geqq\frac{2k+1}{2(k+1)}\frac{1}{4k}=\frac{1+\frac{1}{2k}}{4(k+1)}\geqq\frac{1}{4(k+1)} \quad ―③$$

②③より数学的帰納法より $\dfrac{{}_{2n}C_n}{2^{2n+1}}\geqq\dfrac{1}{4n}$ ―④

①④より $p_n\geqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4n}$