

(1) 3の倍数 A B, 3の倍数以外 A C

n 回目 Aが赤 ($n-1$ 回目 Bが赤で 3の倍数が抽出
 $n-1$ 回目 Cが赤で 3の倍数以外が抽出

$$a_n = \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{2}{3}c_{n-1} \quad \text{--- (1)}$$

n 回目 Bが赤 ($n-1$ 回目 Aが赤で 3の倍数が抽出
 $n-1$ 回目 Bが赤で 3の倍数以外が抽出

$$b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} \quad \text{--- (2)}$$

n 回目 Cが赤 ($n-1$ 回目 Aが赤で 3の倍数以外が抽出
 $n-1$ 回目 Cが赤で 3の倍数が抽出

$$c_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1} \quad \text{--- (3)}$$

(2) $n=1$ のときも (1)(2)(3) は成り立つ

① ≠ 1. $a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$ ②③ ≠ 1. $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_{n-1} + \frac{2}{9}b_{n-1} + \frac{4}{9}a_{n-1} + \frac{2}{9}c_{n-1}$

$$= \frac{5}{9}a_{n-1} + \frac{2}{9}(b_{n-1} + c_{n-1})$$

$$= \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}$$

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{2}{9} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(a_{n-1} - \frac{1}{3})$$

$n=2m$ ($m=1, 2, \dots$) のとき

$$a_2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(a_0 - \frac{1}{3}) \dots \neq 1 \quad a_{2m} - \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^m (a_0 - \frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3})^{m+1}$$

$$a_n = 2(\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{3}$$

これは $n=0$ のときも成り立つ

$n=2m+1$ ($m=1, 2, \dots$) のとき

$$a_3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(a_1 - \frac{1}{3}) \dots \neq 1 \quad a_{2m+1} - \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^m (a_1 - \frac{1}{3}) = -(\frac{1}{3})^{m+1}$$

$$a_n = -(\frac{1}{3})^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{3}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$m+1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

よって $a_n = \begin{cases} 2(\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{3} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -(\frac{1}{3})^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$