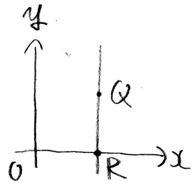
京大理系 1995前期 ①



$P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とする

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar\cos\theta+br\sin\theta \\ ar\sin\theta \end{pmatrix}$ より $Q(ar\cos\theta+br\sin\theta,\ ar\sin\theta)$, $R(ar\cos\theta+br\sin\theta,\ 0)$

$$\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}=|a\cos\theta+b\sin\theta|=\left|\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right|=\sqrt{a^2+b^2}\,|\sin(\theta+\alpha)|$$

※ αは $0\leqq\alpha<2\pi$, $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす定数

$\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値が2より $\sqrt{a^2+b^2}=2$ ―①

$$\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\sqrt{a^2\cos^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2+ab\sin2\theta+b^2\frac{1-\cos2\theta}{2}}=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}+\sin2\theta\cdot ab-\cos2\theta\cdot\frac{b^2}{2}}$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}+\sqrt{a^2b^2+\frac{b^4}{4}}\left(\sin2\theta\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+\frac{b^4}{4}}}-\cos2\theta\frac{\frac{b^2}{2}}{\sqrt{a^2b^2+\frac{b^4}{4}}}\right)}=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}+\sqrt{a^2b^2+\frac{b^4}{4}}\sin(2\theta-\beta)}$$

※ βは $0\leqq\beta<2\pi$, $\sin\beta=\frac{\frac{b^2}{2}}{\sqrt{a^2b^2+\frac{b^4}{4}}}$, $\cos\beta=\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+\frac{b^4}{4}}}$ を満たす定数

$a^2=A$, $b^2=B$ と書く

$\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$ の最大値と最小値の比が3より $\frac{\sqrt{A+\frac{B}{2}+\sqrt{AB+\frac{B^2}{4}}}}{\sqrt{A+\frac{B}{2}-\sqrt{AB+\frac{B^2}{4}}}}=3$. $A+\frac{B}{2}+\sqrt{AB+\frac{B^2}{4}}=9A+\frac{9}{2}B-9\sqrt{AB+\frac{B^2}{4}}$

$\overset{4}{\cancel{8}}A+\overset{2}{\cancel{4}}B=\overset{5}{\cancel{10}}\sqrt{AB+\frac{B^2}{4}}$, $16A^2+16AB+4B^2=25AB+\frac{25}{4}B^2$, $16A^2-9AB-\frac{9}{4}B^2=0$

①より $A+B=4$, $16A^2-9A(-A+4)-\frac{9}{4}(-A+4)^2=0$, $16A^2+9A^2-36A-\frac{9}{4}A^2+18A-36=0$ $\quad 91\times9=819$

$\frac{91}{4}A^2-18A-36=0$. $A=\frac{9\pm\sqrt{81+819}}{\frac{91}{4}}=\frac{36\pm4\cdot30}{91}$.

$A>0$より $A=\frac{156}{91}=\frac{12}{7}$, $a=\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\pm\frac{2\sqrt{21}}{7}$ $\quad 120+36=156$

$B=\frac{16}{7}$, $b=\pm\frac{4}{\sqrt{7}}=\pm\frac{4\sqrt{7}}{7}$ $\quad 91\div7=13$ $\quad 156\div2=78,\ 78\div2=39,\ 39\div3=13$

よって $(a,b)=\left(\frac{2\sqrt{21}}{7},\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{21}}{7},\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{21}}{7},-\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{21}}{7},-\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)$