京大理系 1995前期 ③

(1) C_1, C_2が相異なる3点で交わるためには、$x^3-ax^2-bx-c=0$ が相異なる3つの実数解を持てばよい。

これが相異なる3つの実数解 α, β, γ を持つとき、$x^3-ax^2-bx-c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と書ける

C_1上の点 (α, α^3) で C_1に接する直線は $y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$

これが (p, q) を通るから $q-\alpha^3=3\alpha^2(p-\alpha)$、$2\alpha^3-3p\alpha^2+q=0$ —①

同様にして、$2\beta^3-3p\beta^2+q=0$ —②、$2\gamma^3-3p\gamma^2+q=0$ —③

①②③より α, β, γ は $x^3-\frac{3}{2}px^2+\frac{1}{2}q=0$ の相異なる3つの実数解であるから

$$x^3-ax^2-bx-c=x^3-\frac{3}{2}px^2+\frac{1}{2}q \qquad \begin{cases} a=\frac{3}{2}p \\ b=0 \\ c=-\frac{1}{2}q \end{cases}$$

(2) $x^3-\frac{3}{2}px^2+\frac{1}{2}q=0$ が相異なる3つの実数解を持たなければならない。

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}px^2+\frac{1}{2}q$ とする。$f'(x)=3x^2-3px=3x(x-p)$、$f'(x)=0$ のとき $x=0, p$

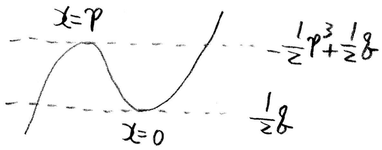
$p\neq 0$ である。

(i) $p<0$ のとき

x	$\cdots$	p	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{2}q$	$\searrow$	$\frac{1}{2}q$	$\nearrow$

$f(x)$の増減表は左表

$f(x)$のグラフは右図



$\frac{1}{2}q<0$ かつ $-\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{2}q>0$

$q<0$ かつ $q>p^3$

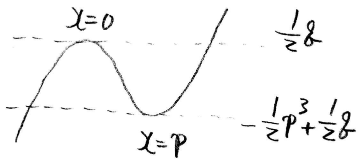
$p^3<q<0$ であればよい。

(ii) $p>0$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}q$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{2}q$	$\nearrow$

$f(x)$の増減表は左表

$f(x)$のグラフは右図



$-\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{2}q<0$ かつ $\frac{1}{2}q>0$

$q<p^3$ かつ $q>0$

$0<q<p^3$ であればよい。

以上より $p<0$ かつ $p^3<q<0$、または、$p>0$ かつ $0<q<p^3$