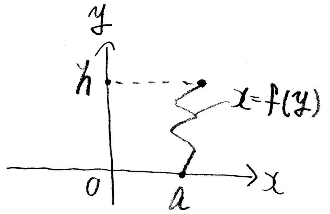
京大理系 1995前期 ⑥



t時間後の水面の高さを $h(t)$ とする。

$\int_0^{h(t)} \pi f(y)^2 dy = Vt$, これの両辺をtで微分すると $\pi f\{h(t)\}^2 \frac{dh(t)}{dt} = V$ —①

$\pi f\{h(t)\}^2 = Vt + \pi a^2$ —②

①②より $(Vt+\pi a^2)\frac{dh(t)}{dt} = V$. $\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{t+\frac{\pi a^2}{V}}$. $h(t) = \log\left(t+\frac{\pi a^2}{V}\right) + C$

$h(0)=0$ より $C = -\log\frac{\pi a^2}{V}$. $h(t) = \log\left(t+\frac{\pi a^2}{V}\right) - \log\frac{\pi a^2}{V} = \log\frac{t+\frac{\pi a^2}{V}}{\frac{\pi a^2}{V}} = \log\left(\frac{V}{\pi a^2}t+1\right)$

$e^{h(t)} = \frac{V}{\pi a^2}t+1$. $\pi a^2\{e^{h(t)}-1\} = Vt$

②より $\cancel{\pi} f\{h(t)\}^2 = \cancel{\pi} a^2\{e^{h(t)}-1\} + \cancel{\pi} a^2$. $f\{h(t)\} = ae^{\frac{h(t)}{2}}$. よって $f(y) = ae^{\frac{y}{2}}$

容器の体積は $\int_0^h \pi a^2 e^y dy = \pi a^2 [e^y]_0^h = \pi a^2(e^h-1)$, $VT = \pi a^2(e^h-1)$. $T = \frac{\pi a^2(e^h-1)}{V}$