京大理系 1996前期 6

t時間後のガソリンの量を $x(t)$ kg とする.

$x(t+\Delta t)=x(t)-\dfrac{100+x(t)}{100}e^{kv}\Delta t$, $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-\dfrac{100+x(t)}{100}e^{kv}$, $\dfrac{dx(t)}{dt}=-\dfrac{100+x(t)}{100}e^{kv}$

$\dfrac{dx(t)}{dt}=-\dfrac{e^{kv}}{100}\{x(t)+100\}$, $\dfrac{d}{dt}\{x(t)+100\}=-\dfrac{e^{kv}}{100}\{x(t)+100\}$, $x(t)+100=Ce^{-\frac{e^{kv}}{100}t}$ (Cは定数)

$x(0)=X$ とすると. $X+100=C$, $x(t)=(X+100)e^{-\frac{e^{kv}}{100}t}-100$

100 km 離れた地点へは $\dfrac{100}{v}$ 時間後につくから, このときのガソリンの量は $(X+100)e^{-\frac{e^{kv}}{v}}-100$ kg —①

ここで $(X+100)e^{-\frac{e^{kv}}{v}}-100>0$. $X+100>100e^{\frac{e^{kv}}{v}}$, $X>100(e^{\frac{e^{kv}}{v}}-1)$ でなければならない. —②

①より, ガソリンの消費量は $X-(X+100)e^{-\frac{e^{kv}}{v}}+100=X(-e^{-\frac{e^{kv}}{v}}+1)-100e^{-\frac{e^{kv}}{v}}+100$ kg であるから

Xの値が小さければ小さいほど, 小さくなる

②より, Xの最小値は $100(e^{\frac{e^{kv}}{v}}-1)$ であるから, このときのガソリンの消費量は

$100(e^{\frac{e^{kv}}{v}}-1)(-e^{-\frac{e^{kv}}{v}}+1)-100e^{-\frac{e^{kv}}{v}}+100=\cancel{-100}+100e^{\frac{e^{kv}}{v}}+\cancel{100e^{-\frac{e^{kv}}{v}}}-100-\cancel{100e^{-\frac{e^{kv}}{v}}}+\cancel{100}$ kg であるから

$\dfrac{e^{kv}}{v}$ の値が小さければ小さいほど小さくなる.

$f(v)=\dfrac{e^{kv}}{v}$ $(v>0)$ とする. $f'(v)=\dfrac{e^{kv}k\cdot v-e^{kv}}{v^2}=\dfrac{(kv-1)e^{kv}}{v^2}$, $f'(v)=0$のとき $v=\dfrac{1}{k}$

v	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	
$f'(v)$	$-$	0	$+$
$f(v)$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

$f(v)$の増減表は左表.

$v=\dfrac{1}{k}$ のとき. Xの最小値は ②より $100(e^{ke}-1)$

以上より最初に積むガソリンの量は $100(e^{ke}-1)$ kg, 走行速度は $\dfrac{1}{k}$ km にすればよい.