京大理系 1997前期 ②

$_{pq}C_1 = pq$ —①

$_{pq}C_p = \dfrac{(pq)!}{\{p(q-1)\}!\,p!}$ —②

1からpqまでで、素因数pを持つものは、$p, 2p \cdots qp$ であるから、
$(pq)!$を素因数分解すると $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k} p^N$ と書ける —③
※ $a_1, a_2 \cdots a_k$はp以外の相異なる素数、$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k, N$は自然数

1から$p(q-1)$までで、素因数pを持つものは $p, 2p \cdots (q-1)p$ であるから
$\{p(q-1)\}!$を素因数分解すると $b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \cdots b_l^{\beta_l} \cdot p^{N-1}$ と書ける —④
※ $b_1, b_2 \cdots b_l$ はp以外の相異なる素数 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_l$ は自然数

$p!$を素因数分解すると $c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} \cdots c_m^{\gamma_m} \cdot p$ と書ける —⑤
※ $c_1, c_2 \cdots c_m$はp以外の相異なる素数 $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_m$ は自然数

②③④⑤より、$_{pq}C_p$ は 素因数 p を持たない。—⑥

同様に、$_{pq}C_q$は素因数qを持たない —⑦

①⑥⑦より題意は示された