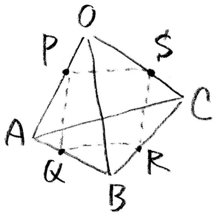
京大理系　1998前期 ③



$OP:PA=p:1-p$
$AQ:QB=q:1-q$
$BR:RC=r:1-r$
$OS:SC=s:1-s$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする.

$\overrightarrow{OP}=p\vec{a}$
$\overrightarrow{OQ}=\vec{a}+q(\vec{b}-\vec{a})=(-q+1)\vec{a}+q\vec{b}$
$\overrightarrow{OR}=\vec{b}+r(\vec{c}-\vec{b})=(-r+1)\vec{b}+r\vec{c}$
$\overrightarrow{OS}=s\vec{c}$

対角線の交点をTとすると $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}=p\vec{a}+\frac{1}{2}\{(-r+1)\vec{b}+r\vec{c}-p\vec{a}\}=\frac{1}{2}p\vec{a}+\frac{1}{2}(-r+1)\vec{b}+\frac{1}{2}r\vec{c}$ —①

AC, OBの中点をD, Eとすると $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$

線分上の点は $0\leqq\alpha\leqq1$ として $\overrightarrow{OD}+\alpha\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\alpha\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)$
$=\frac{1}{2}(-\alpha+1)\vec{a}+\frac{1}{2}\alpha\vec{b}+\frac{1}{2}(-\alpha+1)\vec{c}$ と書ける. —②

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ より $(-q+1)\vec{a}+q\vec{b}-p\vec{a}=(-r+1)\vec{b}+r\vec{c}-s\vec{c}$　$(-p-q+1)\vec{a}+(q+r-1)\vec{b}+(-r+s)\vec{c}=\vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立より $\begin{cases} p+q=1 \\ q+r=1 \\ r=s \end{cases}$　$q=-s+1$, $p=s-1+1=s$ —③

①③より $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}(-s+1)\vec{b}+\frac{1}{2}s\vec{c}$ —④

$\begin{cases} s=-\alpha+1 \\ -s+1=\alpha \\ s=-\alpha+1 \end{cases}$

②は $\alpha=-s+1$ とすると $\frac{1}{2}(s-1+1)\vec{a}+\frac{1}{2}(-s+1)\vec{b}+\frac{1}{2}(s-1+1)\vec{c}=\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}(-s+1)\vec{b}+\frac{1}{2}s\vec{c}$ 書ける —⑤

④⑤より題意は示された.