

$x^2+x+1=0$ は異なる2つの虚数解を持つ。これを α, β とする。

$$\alpha^2+\alpha+1=0 \text{ より } \alpha^3+\alpha^2+\alpha=0, \alpha^3-1=0, \alpha^3=1$$

同様に $\beta^3=1$.

$$(\alpha^{100}+1)^{100}+(\alpha^2+1)^{100}+1=(\alpha+1)^{100}+(\alpha^2+1)^{100}+1=(-\alpha^2)^{100}+(-\alpha)^{100}+1=\alpha^{200}+\alpha^{100}+1=\alpha^2+\alpha+1=0$$

同様に $(\beta^{100}+1)^{100}+(\beta^2+1)^{100}+1=0$

よって割切れる。