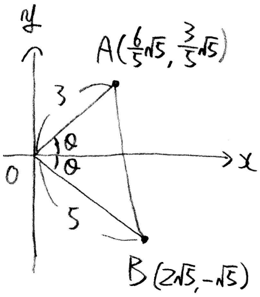
京大文系　2004前期 ③

$\angle AOB=2\theta$とする. $\cos2\theta=\frac{3}{5}$, $\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=\frac{3}{5}$, $2\cos^2\theta=\frac{8}{5}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt5}$



xy座標で考える. 左図のようにO, A, Bをとる.
x軸が$\angle AOB$の2等分線になる.
円の方程式は $(x-2\sqrt5)^2+(y+\sqrt5)^2=10$.
$x^2-4\sqrt5x+20+5=10$. $x^2-4\sqrt5+15=0$. $x=2\sqrt5\pm\sqrt{20-15}=\sqrt5, 3\sqrt5$ より
交点の座標は $(\sqrt5, 0)$ —①, $(3\sqrt5, 0)$ —②

$(\frac{6}{5}\sqrt5, \frac{3}{5}\sqrt5)a+(2\sqrt5, -\sqrt5)b=(\sqrt5, 0)$

$\begin{cases}\frac{6}{5}a+2b=1\\ \frac{3}{5}a-b=0\end{cases}$　$\frac{6}{5}a+2\frac{3}{5}a=1$, $12a=5$, $a=\frac{5}{12}$, $b=\frac{3}{5}\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$

よって ①は $\frac{5}{12}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

$(\frac{6}{5}\sqrt5, \frac{3}{5}\sqrt5)a+(2\sqrt5, -\sqrt5)b=(3\sqrt5, 0)$

$\begin{cases}\frac{6}{5}a+2b=3\\ \frac{3}{5}a-b=0\end{cases}$　$\frac{6}{5}a+2\frac{3}{5}a=3$　$12a=15$　$a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{5}\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

よって ②は $\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$