京大文系 2004前期 ⑤

(1) $k=0,1\cdots$, $l=0,1\cdots$ とする

左辺は $a=2k+1$, $b=2l$ のとき $4k^2+4k+1+4l^2=4(k^2+k+l^2)+1$ より 4で割ると 1余る
$a=2k$, $b=2l+1$ のとき $4k^2+4l^2+4l+1=4(k^2+l^2+l)+1$ より 4で割ると 1余る
$a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき $4k^2+4k+1+4l^2+4l+1=4(k^2+k+l^2+l)+2$ より 4で割ると 2余る
$a=2k$, $b=2l$ のとき $4k^2+4l^2=4(k^2+l^2)$ より 4で割り切れる ―①

右辺は $4\cdot 2^{n-2}$ より 4で割り切れる ―②

①②より題意は示された

(2) $n=2k$ のとき $a^2+b^2=2^{2k}$ $\left(\frac{a}{2^k}\right)^2+\left(\frac{b}{2^k}\right)^2=1$

$\frac{a}{2^k}=A$, $\frac{b}{2^k}=B$ とおくと $A^2+B^2=1$ ―③

$a=A\cdot 2^k$ が整数になるのは $0\leqq A\leqq 1$ でなければならないから $A=0, 1, \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2^k}$ のときのみ ―④
$b=B\cdot 2^k$ が整数になるのは $0\leqq B\leqq 1$ でなければならないから $B=0, 1, \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2^k}$ のときのみ ―⑤

③④⑤を全て満たす A, B の組は $(A, B)=(0, 1), (1, 0)$ のみ
このとき $(a, b)=(0, 2^k), (2^k, 0)=(0, 2^{\frac{n}{2}}), (2^{\frac{n}{2}}, 0)$

$n=2k+1$ のとき $a^2+b^2=2^{2k+1}$ $\left(\frac{a}{2^k}\right)^2+\left(\frac{b}{2^k}\right)^2=2$

$\frac{a}{2^k}=A$ $\frac{b}{2^k}=B$ とおくと $A^2+B^2=2$ ―⑥

$a=A\cdot 2^k$ が整数になるのは $0\leqq A\leqq\sqrt{2}$ でなければならないから $A=0, 1, \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2^k}$ のときのみ ―⑦
$b=B\cdot 2^k$ が整数になるのは $0\leqq B\leqq\sqrt{2}$ でなければならないから $B=0, 1, \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2^k}$ のときのみ ―⑧

⑥⑦⑧を全て満たす A, B の組は $(A, B)=(1, 1)$ のみ
このとき $(a, b)=(2^k, 2^k)=(2^{\frac{n-1}{2}}, 2^{\frac{n-1}{2}})$