京大理系　2004前期　③

nは十分大きいとして考える

$x^2-x+\frac{n-1}{n^2}=0$ のとき $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\frac{n-1}{n^2}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{n^2-4n+4}{n^2}}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{\frac{(n-2)^2}{n^2}}}{2}=\frac{1\pm\frac{n-2}{n}}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{2}{n}\right),\ \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{n}=1-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}$

よって $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)+b_n$, $\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=a_n\frac{1}{n}+b_n$

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=a_n\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)$　$a_n=\frac{\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2-\frac{1}{n^{2n}}}{1-\frac{2}{n}}$

ここで $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$ より $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e^2}$

$b_n=\frac{1}{n^{2n}}-\frac{a_n}{n}$ より $\lim_{n\to\infty}b_n=0$