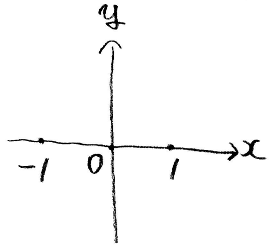
京大理系　2004前期　⑤



Cの中心は虚軸上にある。Cの中心を zi とする。

$\alpha = x + yi$ とする。

$1+z^2 = x^2 + (y-z)^2$, $1+\cancel{z^2} = x^2+y^2-2yz+\cancel{z^2}$, $z = \dfrac{x^2+y^2-1}{2y}$ より

Cの中心は $\dfrac{x^2+y^2-1}{2y} i$

Cの半径の2乗は $1+\left(\dfrac{x^2+y^2-1}{2y}\right)^2$ ―①

$$-\frac{1}{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{x-yi} = -\frac{x+yi}{(x-yi)(x+yi)} = -\frac{x+yi}{x^2+y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$$

$-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ とCの中心とのキョリの2乗は

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \left(\frac{x^2+y^2-1}{2y} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \left(\frac{x^2+y^2-1}{2y}\right)^2 + \cancel{2}\frac{x^2+y^2-1}{\cancel{2y}}\frac{\cancel{y}}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} + \left(\frac{x^2+y^2-1}{2y}\right)^2 + \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2} = 1 + \left(\frac{x^2+y^2-1}{2y}\right)^2$$ ―②

①②より題意は示された。