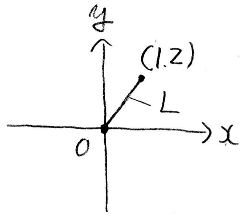
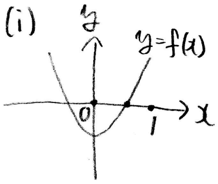
京大理系　2005前期 ①



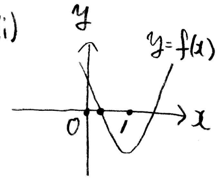
xについての2次方程式 $2x=x^2+ax+b$, $x^2+(a-2)x+b=0$ が
$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解を持てばよい.

このためには. $f(x)=x^2+(a-2)x+b$ として. $y=f(x)$ のグラフが以下の3通りの形になればよい.

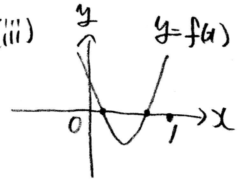
(i)



(ii)



(iii)

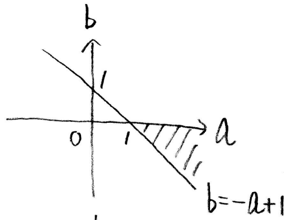


(i)のとき. $f(0)\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$

$b\leqq 0$ かつ $1+a-2+b\geqq 0$

$\Downarrow$

$b\geqq -a+1$

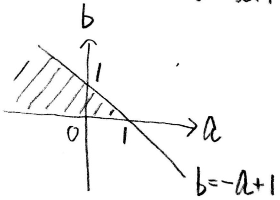


(ii)のとき. $f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$

$b\geqq 0$ かつ $1+a-2+b\leqq 0$

$\Downarrow$

$b\leqq -a+1$



(iii)のとき. $f(x)=x^2+(a-2)x+\frac{(a-2)^2}{4}-\frac{(a-2)^2}{4}+b=\left(x+\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}+b$ より.

$f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ かつ $0\leqq -\frac{a-2}{2}\leqq 1$ かつ $-\frac{(a-2)^2}{4}+b\leqq 0$.

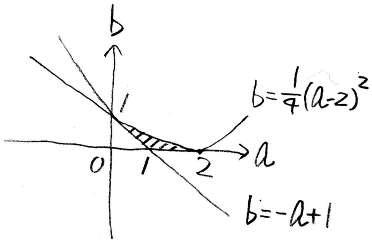
$b\geqq 0$ かつ $1+a-2+b\geqq 0$ かつ $0\leqq -a+2\leqq 2$ かつ $b\leqq \frac{1}{4}(a-2)^2$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\Downarrow$

$b\geqq -a+1$ $\qquad -2\leqq -a\leqq 0$

$\Downarrow$

$0\leqq a\leqq 2$



※ $b=-a+1$ と $b=\frac{1}{4}(a-2)^2$ の交点は
$-4a+4=a^2-4a+4$. $a=0$. $b=1$ より
(0.1)

以上より. 右図の斜線部
境界線上の点含む