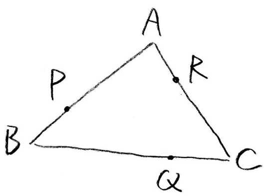
京大理系　2006前期　(5)



△ABCの重心が原点であるような xy 座標で考える。

このとき $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

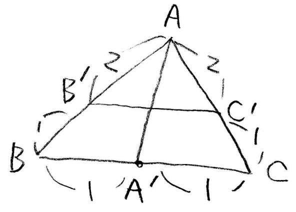
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}$　$(0<\alpha<1)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{BC}$　$(0<\beta<1)$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OC}+\gamma\overrightarrow{CA}$　$(0<\gamma<1)$

△PQRの重心をGとすると

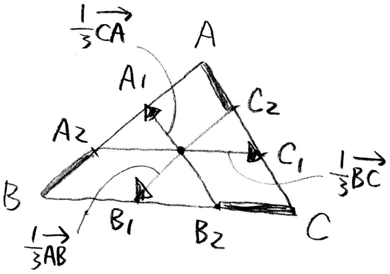
$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\beta\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\gamma\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\beta\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\gamma\overrightarrow{CA}$



Aと△ABCの重心を通る直線とBCの交点をA'とすると、BA' : A'C = 1 : 1

BCと平行で△ABCの重心を通る直線と、AB, ACの交点をB', C'とすると

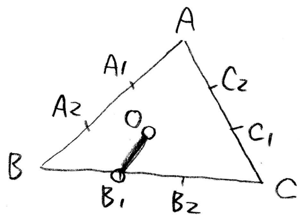
AB' : B'B = 2 : 1 , AC' : C'C = 2 : 1



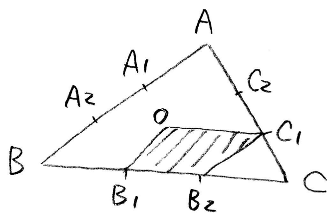
よって、AB, BC, CAを3等分する点を

A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 とすると

左図のようになる。

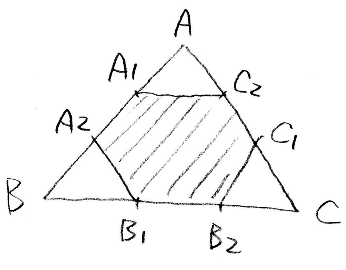


$\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{AB}$ の動く範囲は左図の太線部



$\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\beta\overrightarrow{BC}$ の動く範囲は左図の斜線部

※ 境界線上の点を除く



$\frac{1}{3}\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\beta\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\gamma\overrightarrow{CA}$ の動く範囲

すなわち、△PQRの重心の動く範囲は

左図の斜線部

※ 境界線上の点を除く。