京大理系 2007前期 ②

$\frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} = \frac{a_n}{x^n} + \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}$, $b_n = \frac{a_n}{x^n}$ とすると $b_{n+1} = b_n + \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}$

$$b_n - \cancel{b_{n-1}} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$
$$\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_{n-2}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$+)\ \cancel{b_2} - b_1 = \left(\frac{y}{x}\right)^2$$
$$b_n - b_1 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)^k - \frac{y}{x}$$

$b_1=0$ より $b_n = \dfrac{\frac{y}{x}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\}}{1-\frac{y}{x}} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cancel{\frac{y}{x}} - \left(\frac{y}{x}\right)^{n+1} - \cancel{\frac{y}{x}} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}} = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{y}{x}}$

$$a_n = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(x^n - x y^{n-1}\right)}{1-\frac{y}{x}} = \frac{y^2}{x-y}\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right)$$

(i) $x<y$ のとき

$a_n = \dfrac{y^2}{x-y} y^{n-1}\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} - 1\right\}$

$y>1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$y=1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{1-x}$

$y<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

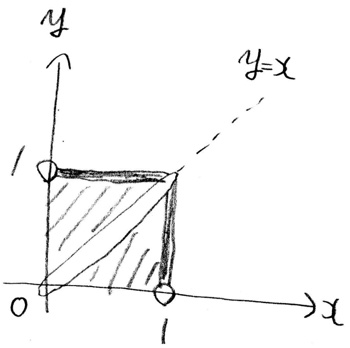
(ii) $x>y$ のとき

$a_n = \dfrac{y^2}{x-y} x^{n-1}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}\right\}$

$x>1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$x=1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{y^2}{1-y}$

$x<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$



よって左図の斜線部と太線部