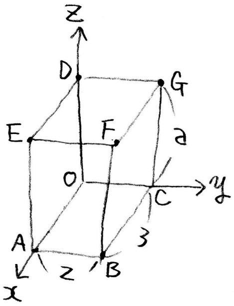
京大理系 2009前期 甲①

3 0 a 3
0 2 a 0
6 −2a −3a

(1)



$\overrightarrow{OE}\times\overrightarrow{OG}=(-2a,-3a,6)$ より

$(-2a,-3a,6)$ は O, E, G を含む平面に垂直であるから

D を通り O, E, G を含む平面に垂直な直線上の点は

$(0,0,a)+\alpha(-2a,-3a,6)=(-2a\alpha,-3a\alpha,6\alpha+a)$ —① と書ける

①が辺BC上にあるから、$0\leqq X\leqq 3$ として $\begin{cases}-2a\alpha=X & —②\\ -3a\alpha=2 & —③\\ 6\alpha+a=0 & —④\end{cases}$

④より $\alpha=-\frac{a}{6}$、③より $\frac{a^2}{2}=2$、$a>0$ より $a=2$.

②より $-4\left(-\frac{2}{6}\right)=X$、$X=\frac{4}{3}$ これは $0\leqq X\leqq 3$ を満たす.

以上より $a=2$、Pの座標は $\left(\frac{4}{3},2,0\right)$

(2) 白球を O、赤球を X と書く

k回目に取り出す直前には O は2個、X は k個ある

このとき、すべての取り出し方は $\frac{(k+2)!}{2!\,k!}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ 通り、成功する取り出し方は 1通り であるから

k回目に失敗する確率は $1-\frac{2}{(k+2)(k+1)}=\frac{k^2+3k+\cancel{2}-\cancel{2}}{(k+2)(k+1)}=\frac{(k+3)k}{(k+2)(k+1)}$

k回まで失敗する確率を a_k とすると $k\geqq 2$ のとき $a_k=\frac{(k+3)k}{(k+2)(k+1)}a_{k-1}$

よって $k\geqq 2$ のとき $a_k=\frac{(k+3)\cancel{k}}{\cancel{(k+2)}(k+1)}\cdot\frac{\cancel{(k+2)}\cancel{(k-1)}}{\cancel{(k+1)}\cancel{k}}\cdot\frac{\cancel{(k+1)}\cancel{(k-2)}}{\cancel{k}\cancel{(k-1)}}\cdots\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{4}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{3}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot 2}{4\cdot\cancel{3}}a_1=\frac{2(k+3)}{4(k+1)}a_1=\frac{k+3}{2(k+1)}a_1$

$a_1=\frac{2}{3}$ より、$k\geqq 2$ のとき $a_k=\frac{k+3}{\cancel{2}(k+1)}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}=\frac{k+3}{3(k+1)}$

n−1回まで失敗する確率は $\frac{n+2}{3n}$、さらにn回目に成功する確率は $\frac{n+2}{3n}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{3n(n+1)}$