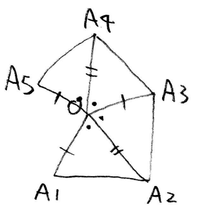
京大理系 2009前期 甲②

$\triangle OA_1A_2$ と $\triangle OA_2A_3$ が辺 OA_2 に関して対称

$\triangle OA_2A_3$ と $\triangle OA_3A_4$ が辺 OA_3 に関して対称

$\triangle OA_3A_4$ と $\triangle OA_4A_5$ が辺 OA_4 に関して対称



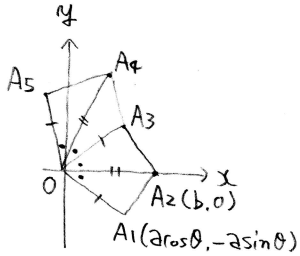
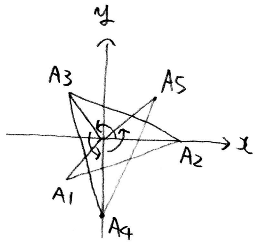


図1



xy 平面で考える. 図1のように O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 をとる. $\angle A_1OA_2=\theta$ とする.

A_5 の座標は $(a\cos 3\theta, a\sin 3\theta)$

$\triangle OA_2A_5$ の面積は $b|a\sin 3\theta|\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ab|\sin 3\theta|$, $\triangle OA_1A_2$ の面積は $ba\sin\theta\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$

(i) $0<\theta<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$ のとき

$|\sin 3\theta|=\sin 3\theta$ より $-4\sin^3\theta+3\sin\theta=n\sin\theta$, $4\sin^2\theta=-n+3$. $\sin^2\theta=\frac{-n+3}{4}$

$n=1$ のとき $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$. $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$

$n=2$ のとき $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$. $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi$ のとき

$|\sin 3\theta|=-\sin 3\theta$ より $4\sin^3\theta-3\sin\theta=n\sin\theta$, $4\sin^2\theta=n+3$. $\sin^2\theta=\frac{n+3}{4}$

$n=1$ のとき $\sin^2\theta=1$. $\sin\theta=1$ $\theta=\frac{\pi}{2}$

以上より $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$