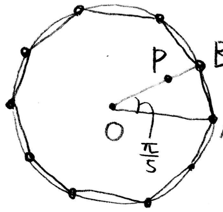
京大文系　2010前期　④



OA=OB=a，OP=p とすると．

$p^2=a(a-p)$，$p^2+ap-a^2=0$．$p=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}a$ —①

$p>0$ より $p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$

余弦定理より $AB^2=a^2+a^2-2a^2\cos\frac{\pi}{5}=2(1-\cos\frac{\pi}{5})a^2$ —②

$\frac{\pi}{5}=\theta$ とする．$\sin 5\theta=0$ —③

$\sin 5\theta=\sin(4\theta+\theta)=\sin 4\theta\cos\theta+\cos 4\theta\sin\theta$

$=2\sin 2\theta\cos 2\theta\cos\theta+(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)\sin\theta$

$=2\cdot 2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\theta+\{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2-(2\sin\theta\cos\theta)^2\}\sin\theta$

$=\sin\theta\{4(1-\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)^2-4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\}$

$=\sin\theta(4-8\sin^2\theta-4\sin^2\theta+8\sin^4\theta+1-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta)$

$=\sin\theta(16\sin^4\theta-20\sin^2\theta+5)$ —④

③④より $\sin\theta\neq 0$ より $16\sin^4\theta-20\sin^2\theta+5=0$

$\sin^2\theta=\frac{10\pm\sqrt{100-80}}{16}=\frac{10\pm 2\sqrt{5}}{16}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

$\theta<\frac{\pi}{4}$ より $\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$．$\sin^2\theta<\frac{1}{2}$　$\sin^2\theta=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

$\cos^2\theta=1-\frac{5-\sqrt{5}}{8}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$．$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

②より $AB^2=\cancel{2}\,\frac{4-1-\sqrt{5}}{\cancel{4}_2}a^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}a^2=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a\right)^2$．$AB=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$ —⑤

①⑤より題意は示された．