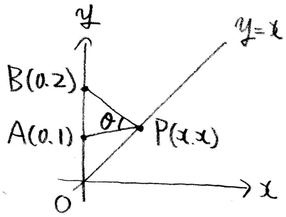
京大理系 2010前期 甲③



∠APB=θ とする

$\overrightarrow{PA}=(-x,-x+1)$, $\overrightarrow{PB}=(-x,-x+2)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\theta$ より $\cos\theta=\dfrac{x^2+x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+x^2-2x+1}\sqrt{x^2+x^2-4x+4}}=\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2-2x+1}\sqrt{2x^2-4x+4}}$

明らかに $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから、θが最大のとき $\cos\theta$ は最小、$\cos^2\theta$ は最小

$$f(x)=\frac{(2x^2-3x+2)^2}{(2x^2-2x+1)(2x^2-4x+4)}=\frac{4x^4+9x^2+4-12x^3+8x^2-12x}{4x^4-8x^3+8x^2-4x^3+8x^2-8x+2x^2-4x+4}=\frac{4x^4-12x^3+17x^2-12x+4}{4x^4-12x^3+18x^2-12x+4}$$

$$=\frac{4x^4-12x^3+18x^2-12x+4-x^2}{4x^4-12x^3+18x^2-12x+4}=1-\frac{1}{4x^2-12x+18-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}$$ $(x>0)$ とする.

$f(x)$ が最小のとき $\dfrac{1}{4x^2-12x+18-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}$ は最大、$4x^2-12x+18-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}$ は最小

$g(x)=4x^2-12x+18-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}$ $(x>0)$ とする

$g'(x)=8x-12+\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}=\frac{4}{x^3}(2x^4-3x^3+3x-2)$

$=(x^2-1)\left\{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{8}+2\right\}=(x^2-1)\left\{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\}$

$g'(x)=0$ のとき $x=1$

x	…	1	…
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	2	↗

※ $g(1)=4-12+18-12+4$

$g(x)$ の増減表は左表

$g(x)$ の最大値は 2

このとき $f(x)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{r}
2x^3-x^2-x+2 \\
x-1\ \overline{)\ 2x^4-3x^3\qquad+3x-2} \\
2x^4-2x^3 \\
\hline
-x^3 \\
-x^3+x^2 \\
\hline
-x^2+3x \\
-x^2+x \\
\hline
2x-2 \\
2x-2 \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2x^2-3x+2 \\
x+1\ \overline{)\ 2x^3-x^2-x+2} \\
2x^3+2x^2 \\
\hline
-3x^2-x \\
-3x^2-3x \\
\hline
2x+2 \\
2x+2 \\
\hline
0
\end{array}$$